

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1951 - 014

Over een vermoeden betreffende de entropie

H.J.A. Duparc en Dr. W. Peremans



1951

Over een vermoeden betreffende de entropie.

H.J.A. Duparc en Dr W. Peremans.

Zij gegeven een vorm

$$P = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{n_k}{n}\right)^{n_k},$$

waarbij  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Vervangt men elke faculteit in deze formule door de benadering van Stirling

$$a! = \sqrt{2\pi} e^{-a} a^{a+\frac{1}{2}},$$

dan gaat de uitdrukking P over in de uitdrukking

$$Q = (\sqrt{2\pi})^{1-k} (n_1 n_2 \dots n_k)^{-\frac{1}{2}}.$$

Zij verder de grootheid H gedefinieerd door

$$nH = -n_1 \log n_1 - \dots - n_k \log n_k + n \log n.$$

Stel nog  $p_1 = \frac{n_1}{n}, \dots, p_k = \frac{n_k}{n}$ . Dan heeft men

$$Q = (2\pi)^{\frac{1}{2}-k} A^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}k},$$

waarin  $A = p_1 p_2 \dots p_k$ , en

$$H = -p_1 \log p_1 - \dots - p_k \log p_k,$$

dus

$$B = e^{-H} = p_1^{p_1} \dots p_k^{p_k}.$$

Indien de grootheden  $n_1, \dots, n_k$  wijzigingen ondergaan, waarbij echter hun som  $n$  constant blijft, sedat hierdoor ook  $A$ ,  $B$ ,  $P$ ,  $Q$  en  $H$  wijzigingen ondergaan, die wij met  $dA, \dots, dH$  aanduiden, wordt gevraagd te onderzoeken of:

- 1°: de wijzigingen van  $Q$  en  $H$  (of wat op hetzelfde neerkomt: van  $A$  en  $B$ ) tegengesteld teken hebben;
- 2°: de wijzigingen van  $P$  en  $H$  tegengesteld teken hebben.

De bewering 1° is voor  $k=2$  inderdaad juist, want dan heeft men

$$A = p_1(1-p_1); \quad B = p_1^{p_1}(1-p_1)^{1-p_1}$$

dus

$$\frac{dA}{dp_1} = 1-2p_1; \quad \frac{dB}{dp_1} = B \log \frac{p_1}{1-p_1}.$$

Is  $p_1 < \frac{1}{2}$  dan is  $\frac{dA}{dp_1} > 0$  en  $\frac{dB}{dp_1} < 0$ ; is  $p_1 > \frac{1}{2}$  dan is  $\frac{dA}{dp_1} < 0$  en  $\frac{dB}{dp_1} > 0$ .

Voor  $k \geq 3$  is echter de bewering niet juist, zoals uit het volgende blijkt voor  $k = 3$ . Men heeft dan nl., gebruik makende van  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_2}{p_2} + \frac{dp_3}{p_3} = \frac{dp_1(1-2p_1-p_2)}{p_1(1-p_1-p_2)} + \frac{dp_2(1-p_1-2p_2)}{p_2(1-p_1-p_2)}.$$

en

$$\begin{aligned} \frac{dB}{B} &= dp_1 \log p_1 + dp_2 \log p_2 + dp_3 \log p_3 = dp_1 \log \frac{p_1}{1-p_1-p_2} + \\ &+ dp_2 \log \frac{p_2}{1-p_1-p_2}. \end{aligned}$$

De wijzigingen  $dA$  en  $dB$  kunnen dan en slechts dan voor alle verhoudingen van  $dp_1$  en  $dp_2$  verschillend teken hebben als de determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1-2p_1-p_2}{p_1(1-p_1-p_2)} & \frac{1-p_1-2p_2}{p_2(1-p_1-p_2)} \\ \log \frac{p_1}{1-p_1-p_2} & \log \frac{p_2}{1-p_1-p_2} \end{vmatrix} = 0$$

is voor alle toelaatbare  $p_1$  en  $p_2$ , iets, dat uiteraard niet het geval is.

Bv. bij  $p_1 = \frac{1}{3}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$ , dus  $p_3 = \frac{1}{3}$  heeft men

$$\frac{dA}{A} = -4dp_1 - 3dp_2; \quad \frac{dB}{B} = \log 3 \cdot dp_1 + \log 2 \cdot dp_2$$

en hebben  $dA$  en  $dB$  dus hetzelfde teken als

$$-\frac{4}{3} < \frac{dp_1}{dp_2} < -\frac{\log 2}{\log 3}, \text{ dus } -0,75 < \frac{dp_1}{dp_2} < -0,631\dots$$

Rest ons thans ook het vermoeden 2° te weerleggen.

Men heeft dan

$$\frac{n! p_1^{np_1} \dots p_k^{np_k}}{\Gamma(np_1+1) \dots \Gamma(np_k+1)},$$

dus

$$\frac{dP}{P} = n(1+\log p_1)dp_1 + \dots + n(1+\log p_k)dp_k - n \frac{\Gamma'(np_1+1)}{\Gamma(np_1+1)} dp_1 - \dots -$$

$$+ n \frac{\Gamma'(np_k+1)}{\Gamma(np_k+1)} dp_k,$$

dus, wegens

$$-\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} = C + \frac{1}{u} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m+u} - \frac{1}{m} \right),$$

$$\frac{dP}{nP} = \log p_1 dp_1 + \dots + \log p_k dp_k + \sum_{k=1}^k \left\{ \frac{dp_k}{np_k+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{dp_k}{m+np_k+1} - \frac{dp_k}{m} \right) \right\}$$

$$= \log p_1 dp_1 + \dots + \log p_k dp_k + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{dp_1}{m+np_1+1} + \dots + \frac{dp_k}{m+np_k+1} \right).$$

Verder is

$$dH = -dp_1 \log p_1 - \dots - dp_k \log p_k.$$

Nemen wij allereerst  $k=2$ , in welk geval het vermoeden wel juist blijkt te zijn. Immers men heeft dan

$$\frac{1}{nP} \frac{dP}{dp_1} = \log \frac{p_1}{1-p_1} + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{m+n_1+1} - \frac{1}{m+n_2+1} \right)$$

$$= \log \frac{n_1}{n_2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n_2 - n_1)}{(m+n_1+1)(m+n_2+1)};$$

$$\frac{dH}{dp_1} = -\log p_1 + \log p_2 = \log \frac{n_2}{n_1}.$$

Zonder de algemeenheid te schaden mogen wij onderstellen dat  $n_1 > n_2$  is, dus  $\frac{dH}{dp_1} < 0$ .

Dan is  $\frac{dP}{dp_1} > 0$ , want men heeft

$$\log \frac{n_1}{n_2} - \left( \frac{1}{n_2+1} + \dots + \frac{1}{n_1} \right) > 0.$$

Deze formule bewijzen wij op de volgende gronden. Voor  $n_1 = n_2$  is het linkerlid nul; zij nu de formule bewezen voor  $n_1 \geq n_2$  dan tenen wij haar daaruit aan voor  $n_1+1$  in plaats van  $n_1$ . Wij hebben dan

$$\log \frac{n_1}{n_2} \geq \frac{1}{n_2+1} + \dots + \frac{1}{n_1}$$

en weten verder dat  $\left( \frac{n_1+1}{n_1} \right)^{n_1+1}$  een monotoon dalende rij is met

limiet  $e$ , dus  $\log \frac{n_1+1}{n_1} > \frac{1}{n_1+1}$ , zodat wij na optelling der gevonden ongelijkheden krijgen

$$\log \frac{n_1+1}{n_2} > \frac{1}{n_2+1} + \dots + \frac{1}{n_1+1}.$$

Voor  $k \geq 3$  is het vermoeden evenwel onjuist, hetgeen wij laten zien voor  $k=3$ . Zowel  $dP$  als  $dH$  hangen dan slechts af van  $dp_1$  en  $dp_2$ . Het vermoeden dat  $dP$  en  $dH$  steeds tegengesteld teken hebben houdt weer in dat  $dH=0$  en  $dQ=0$  eenzelfde verhouding van  $dp_1$  en  $dp_2$  opleveren, wat kennelijk niet het geval is. Neem b.v. weer  $p_1=\frac{1}{2}$ ,  $p_2=\frac{1}{3}$  dus  $p_3=\frac{1}{6}$ . Dan is bij  $n=6$

$$dH = \log 2 \cdot dp_1 + \log 3 \cdot dp_2 + \log 6 \cdot dp_3 = -\log 3 \cdot dp_1 - \log 2 \cdot dp_2.$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dP} &= \log 3 \cdot dp_1 + \log 2 \cdot dp_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{dp_1}{m+4} + \frac{dp_2}{m+3} + \frac{dp_3}{m+2} \right) \\ &= \log 3 \cdot dp_1 + \log 2 \cdot dp_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{dp_1}{m+4} - \frac{dp_1}{m+2} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{dp_2}{m+3} - \frac{dp_2}{m+2} \right) \\ &= dp_1 \left( \log 3 - \frac{1}{3} \right) + dp_2 \left( \log 2 - \frac{1}{3} \right), \end{aligned}$$

zodat  $dP$  en  $dH$  hetzelfde teken kunnen krijgen als maar

$$-\frac{\log 2 - \frac{1}{3}}{\log 3 - \frac{1}{6}} < \frac{dp_1}{dp_2} < -\frac{\log 2}{\log 3} \approx -0,727 < \frac{dp_1}{dp_2} < -0,631 \dots$$